Απειροστικός ΙΙΙ – Φυλλάδιο Ασκήσεων 4

Άσκηση 1. *Βρείτε τον μέσο όρο των συναρτήσεων*

(i) $f(x, y) = y\sin(xy)$, *στο* $D = [0, \pi]^2$.

(ii) $f(x, y) = e^{x+y}$, *στο τρίγωνο με κορυφές* $(0, 0), (0, 1), (1, 0)$.

(iii) $f(x, y, z) = e^{-z}$, *στην μπάλα* $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

Άσκηση 2. *Βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου μάζας:*

(i) *Του ημίδισκου* $x^2 + y^2 \leq 1$, $y \geq 0$, *στον* $\mathbb{R}^2$ *με ομοιόμορφη πυκνότητα.*

(ii) *Του τριγώνου στον* $\mathbb{R}^2$ *που ορίζεται από τις ευθείες* $x = 0$, $y = x$, $y = -x+2$ *με ομοιόμορφη πυκνότητα.*

(iii) *Της περιοχής στον* $\mathbb{R}^2$ *που φράσσεται από τα γραφήματα των* $y = x^2$, $y = x$ *με πυκνότητα* $\delta(x, y) = x + y$.

(iv) *Του στερού στον* $\mathbb{R}^3$ *που φράσσεται από τον κύλινδρο* $x^2 + y^2 = 2x$ *και τον κώνο* $z^2 = x^2 + y^2$ *με πυκνότητα* $\delta(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

(v) *Της μπάλας* $x^2 + y^2 + z^2 \leq 25$ *με πυκνότητα* $\delta(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 1$.

Άσκηση 3. *Έστω* $W \subset \mathbb{R}^3$ *συμμετρικό χωρίο ως προς το επίπεδο* $\Pi \subset \mathbb{R}^3$. *Δείξτε ότι το κέντρο μάζας* $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ *του* W *με ομοιόμορφη πυκνότητα βρίσκεται πάνω στο* Π. *[Υπόδειξη: Θεωρήστε σύστημα συντεταγμένων* xyz *τέτοιο ώστε το* Π *να συμπίπτει με το επίπεδο* xy *και δείξτε ότι* $\overline{z} = 0$.*]*

Άσκηση 4. *Υπολογίστε τα καταχρηστικά ολοκληρώματα:*

$$\iint_{[0,1]^2} \frac{1}{\sqrt{xy}} dxdy, \qquad \iint_{[1,+\infty)^2} \frac{1}{(xy)^2} dxdy, \qquad \iint_{\{0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq x\}} \frac{1}{\sqrt{|x-y|}} dxdy$$

Άσκηση 5. *Υπολογίστε τα παρακάτω ολοκληρώματα θεωρώντας τις κατάλληλες αλλαγές συντεταγμένων:*

$$\iint_{\{x^2+y^2\leq 1\}} \frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}} dxdy, \qquad \iiint_{\{x^2+y^2+z^2\leq R^2,\ x,y,z\geq 0\}} \frac{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{z+(x^2+y^2+z^2)^2}} dxdydz$$

Άσκηση 6. *Έστω* ρ, θ, ϕ *οι συνήθεις σφαιρικές συντεταγμένες. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα της συνάρτησης* $f(\rho, \theta, \phi) = \rho^{-1}$ *στην περιοχή που ορίζεται από τις ανισότητες* $\rho \leq \sqrt{6}$ *και* $1 \leq \tan\phi \leq 2$.